円の内外接と四角形の面積公式

@ymk_math

2023 年 5 月 28 日

四角形 ABCD について, $\mathrm{AB}=a, \mathrm{BC}=b, \mathrm{CD}=c, \mathrm{DA}=d$ とする. このとき, 四角形 ABCD の面積 S を求める.

$\angle\mathrm{ABC}=\alpha, \angle\mathrm{CDA}=\beta$ とすると, $S=\dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\beta)$ となる. よって

$$4S^2=a^2b^2\sin^2\alpha+2abcd\sin\alpha\sin\beta+c^2d^2\sin^2\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が得られる. 一方, 余弦定理を用いて AC^2 を 2 通りで表すと

$$\mathrm{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$$

より

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)=ab\cos\alpha-cd\cos\beta$$

となるから, 両辺を 2 乗することで

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=a^2b^2\cos^2\alpha-2abcd\cos\alpha\cos\beta+c^2d^2\cos^2\beta \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる.

①, ② の両辺を足して 4 倍することにより

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)$$

となる. ここで, $T=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおいて式変形を進めると

$$\begin{aligned}
16S^2&=4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)\\
&=4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+8abcd\\
&=4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&=(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&=((a+b)^2-(c-d)^2)(-(a-b)^2+(c+d)^2)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&=16(T-a)(T-b)(T-c)(T-d)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
S&=\sqrt{(T-a)(T-b)(T-c)(T-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}
\end{aligned}$$

となる. 以上より, 四角形の面積は

$$\boldsymbol{S=\sqrt{(T-a)(T-b)(T-c)(T-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}, T=\frac{a+b+c+d}{2}}$$

で与えられることがわかる. この公式は, ブレートシュナイダーの公式と呼ばれている.

このブレートシュナイダーの公式からすぐにわかることは, 四角形が円に内接するとき, 対角の和は 180° であるから, 公式は

$$\boldsymbol{S = \sqrt{(T-a)(T-b)(T-c)(T-d)}, T = \frac{a+b+c+d}{2}}$$

となる. この公式は, ブラーマグプタの公式と呼ばれている.

さらに, この公式において $d \to 0$ の極限を考えると, 3 辺が a, b, c の三角形の面積公式であるヘロンの公式

$$\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}}$$

と一致することがわかる.